Analysis 3

27.11.2017
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
Abgabe: 04.12.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 8

Aufgabe 1: Transformationssatz **3 + 3 + 4 = 10 Punkte**

Sei $B := \{(x_1, x_2)^\top : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ der offene Einheitsball in $\mathbb{R}^2$ bzgl. der Euklidischen Norm. Berechnen Sie die nachfolgenden Integrale mittels des Transformationssatzes (nutzen Sie Polarkoordinaten):

$$\text{(a)} \quad \int_B (1 - x_1^2 - x_2^2)\,\mathrm{d}m^2, \quad \text{(b)} \quad \int_B (2x_1x_2 e^{\frac{x_2^2}{x_1^2+x_2^2}})\,\mathrm{d}m^2$$

Berechnen Sie weiters – indem Sie nun dreidimensionale Polarkoordinaten nutzen – das Integral

$$\text{(c)} \quad \int_{\mathbb{R}^3\setminus\{0\}} \frac{e^{-|x|}}{|x|}\,\mathrm{d}m^3,$$

wobei $|\cdot|$ nun die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 2: Fubini & Transformationssatz **3 + 7 = 10 Punkte**

Sei $A \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$A := \{(s\cos(t), s\sin(t))^\top : \ 0 < t < 2\pi, \ 0 < s < (\sin(2t))^2\}.$$

(a) Erstellen Sie in einem zweidimensionalen kartesischen Koordinatensystem eine Skizze der Menge A.

(b) Begründen Sie, dass A Lebesgue-messbar ist und bestimmen Sie $m(A)$, wobei hier m das zweidimensionale Lebesguemaß ist.

Aufgabe 3: Fubini & Transformationssatz **2 + 3 + 5 = 10 Punkte**

Für $p, q > 0$ sei die *Betafunktion* $B(p, q)$ gegeben durch

$$B(p,q) := \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,\mathrm{d}t.$$

Seien im Folgenden $p, q > 0$.

(a) Zeigen Sie, dass $B(p, q) = B(q, p)$.

(b) Zeigen Sie, dass

$$B(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(\varphi))^{2p-1}(\cos(\varphi))^{2q-1}\,\mathrm{d}\varphi.$$

(c) Zeigen Sie, dass

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

wobei $\Gamma\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ die aus der Analysis 1 bekannte Gammafunktion ist.

Aufgabe 4: Transformationssatz **10 Punkte**

Sei $U \subset \mathbb{R}^d$ offen und $K \subset U$ eine kompakte Teilmenge, deren Rand eine Lebesgue-Nullmenge ist. Sei weiters $V \subset \mathbb{R}^d$ offen, $T\colon U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus und $Q := T(K)$. Zeigen Sie, dass dann

$$\min_{x\in K} |\det(T'(x)| \cdot m(K) \leq m(Q) \leq \max_{x\in K} |\det(T'(x))| \cdot m(K).$$