Math. Vertiefung - Linearität in Algebra und Analysis
Übungsblatt 6

Abgabe: 26./27. November 2018 in den Übungsgruppen.

Aufgabe 1. Zeige, dass die Differentialgleichung

$$\dot{x} = x,\ x(0) = 1$$

genau eine Lösung $x(t)$ besitzt; diese nennen wir die *Exponentialfunktion* und schreiben $x(t) = \exp(t)$. Beweise daraus die folgenden Eigenschaften:

(i) Es gilt das Additionstheorem $\exp(s + t) = \exp(s)\exp(t)$.

(ii) Es gilt $\exp(t) > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Das Grenzwertverhalten ist wie folgt:

$$\lim_{t\to-\infty} \exp(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} \exp(t) = +\infty.$$

(*Hinweis:* Für die Eindeutigkeit betrachte die Funktion $E(t) = x^2$ und verfahre analog zum in der Vorlesung vorgestellten Eindeutigkeitsbeweis für Differentialgleichungen zweiter Ordnung.)

Aufgabe 2. Zeige, dass die beiden Differentialgleichungen

$$\ddot{x} + x = 0,\ x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = 1 \tag{1}$$

und

$$\ddot{x} + x = 0,\ x(0) = 1,\ \dot{x}(0) = 0 \tag{2}$$

genau eine Lösung besitzen; diese nennen wir im Falle (1) die *Sinusfunktion* $\sin(t)$ und im Falle (2) die *Kosinusfunktion* $\cos(t)$. Beweise daraus die folgenden Eigenschaften:

(i) Die Ableitungen sind $(\dot{\sin})(t) = \cos(t)$ und $(\dot{\cos})(t) = -\sin(t)$.

(ii) Es gilt $\cos(t)^2 + \sin(t)^2 = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Es gelten die Additionstheoreme

$$\sin(s + t) = \sin(s)\cos(t) + \cos(s)\sin(t)$$

und

$$\cos(s + t) = \cos(s)\cos(t) - \sin(s)\sin(t).$$