28.10.2004

תרגיל מס׳ 2 במושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית

1. יהי R חוג. יהי $M_n(R)$ חוג המטריצות $n\times n$ מעל R.

א. יהיו $m,n\geq 1$. הראו כי $M_{mn}(R)\cong M_m(M_n(R))$.

ב. יהי I אידיאל דו-צדדי של R. נסמן ב- $M_n(I)$ את הקבוצה $\{A=(a_{ij}):\forall i,j \quad a_{ij}\in I\}$.
הראו כי $M_n(I)$ אידיאל דו-צדדי של $M_n(R)$.

ג. להיפך, הראו כי אם J אידיאל דו-צדדי של $M_n(R)$, אזי קיים אידיאל דו-צדדי I של R כך ש- $J=M_n(I)$.

ד. הסיקו כי אם F שדה, החוג $M_n(F)$ הוא פשוט.

ה. הראו כי אם I אידיאל דו-צדדי של R, $M_n(R)/M_n(I)\cong M_n(R/I)$.

ו. הראו כי $M_n(R[x])\cong M_n(R)[x]$.

ז. הוכיחו כי $Z(M_n(R))\cong Z(R)$.

ח. הראו כי $M_n(R)^{op}\cong M_n(R^{op})$.

2. יהי R חוג.

א. אם $f:M\to N$ הומומורפיזם של מודולים, אזי $0\to\ker f\to M\to \operatorname{Im} f\to 0$ מדויקת.

ב. אם N_1,N_2 הם R-מודולים, קיימת סדרה קצרה מדויקת $0\to N_1\to N_1\oplus N_2\to N_2\to 0$,
וסדרה זו מתפצלת.

ג. הראו כי שני התנאים הבאים שקולים:

(i) כל סדרה קצרה מדויקת של R-מודולים, מתפצלת.

(ii) לכל תת-מודול יש משלים ישר: כלומר אם $N\subseteq M$ הם R-מודולים, קיים תת-מודול $N'\subseteq M$ כך ש- $N\bigcap N'=(0)$ ו- $M\cong N\oplus N'$.

ד. תנו דוגמה לחוג R ולארבעה מודולים M_1,M_2,M,M' כך שקיימות סדרות מדויקות $0\to M_1\to M\to M_2\to 0$ ו- $0\to M_1\to M'\to M_2\to 0$, אבל M ו- M' אינם איזומורפיים.

3. יהיו p,q שני רציונליים חיוביים.

נסמן ב- $H_{p,q}$ את המרחב הליניארי ממימד 4 מעל $\mathbf{Q}$, עם בסיס $\{1,i,j,k\}$. נגדיר על $H_{p,q}$ כפל וחיבור כדלקמן; החיבור יהיה החיבור במרחב הליניארי, והכפל יוגדר על איברי בסיס בעזרת הנוסחאות הבאות, ויורחב לכל האיברים ע״י דיסטריבוטיביות.

$$\begin{array}{lll} i^2=-p & j^2=-q & k^2=-pq \\ ij=k & jk=qi & ki=pj \\ ji=-k & kj=-qi & ik=-pj \end{array}$$

(1 פועל כזהות).

א. הראו כי ביחס לפעולות הנ״ל, $H_{p,q}$ היא אלגברה מעל $\mathbf{Q}$ שהיא גם חוג עם חילוק.

ב. אם $p',q'\in \mathbf{Q}$ חיוביים ו- $p'=a^2p, q'=b^2q$ עבור $a,b\in \mathbf{Q}$, בנו איזומורפיזם של $\mathbf{Q}$-אלגבראות $H_{p,q}\cong H_{p',q'}$.

ג. הראו כי לכל $a,b,c\in \mathbf{Q}$, $H_{p,q}$ מכילה שדה איזומורפי לשדה $\mathbf{Q}(\sqrt{-a^2p-b^2q-c^2pq})$.

ד. חשבו את $Z(H_{p,q})$.