

תרגיל מס' 2 במושגי יסוד באלגברה לא קומוטטיבית

1. יהי R חוג. יהי $M_n(R)$ חוג המטריצות $n \times n$ מעל R .
 - א. יהיו $m, n \geq 1$. הראו כי $M_{mn}(R) \cong M_m(M_n(R))$.
 - ב. יהי I אידיאל דו-צדדי של R . נסמן ב- $M_n(I)$ את הקבוצה $\{A = (a_{ij}) : \forall i, j \ a_{ij} \in I\}$. הראו כי $M_n(I)$ אידיאל דו-צדדי של $M_n(R)$.
 - ג. להיפך, הראו כי אם J אידיאל דו-צדדי של $M_n(R)$, אזי קיים אידיאל דו-צדדי I של R כך ש- $J = M_n(I)$.
 - ד. הסיקו כי אם F שדה, החוג $M_n(F)$ הוא פשוט.
 - ה. הראו כי אם I אידיאל דו-צדדי של R , $M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$.
 - ו. הראו כי $M_n(R[x]) \cong M_n(R)[x]$.
 - ז. הוכיחו כי $Z(M_n(R)) \cong Z(R)$.
 - ח. הראו כי $M_n(R)^{op} \cong M_n(R^{op})$.
2. יהי R חוג.
 - א. אם $f : M \rightarrow N$ הומומורפיזם של מודולים, אזי $0 \rightarrow \ker f \rightarrow M \rightarrow \text{Im } f \rightarrow 0$ מדויקת.
 - ב. אם N_1, N_2 הם R -מודולים, קיימת סדרה קצרה מדויקת $0 \rightarrow N_1 \rightarrow N_1 \oplus N_2 \rightarrow N_2 \rightarrow 0$, וסדרה זו מתפצלת.
 - ג. הראו כי שני התנאים הבאים שקולים:
 - (i) כל סדרה קצרה מדויקת של R -מודולים, מתפצלת.
 - (ii) לכל תת-מודול יש משלים ישר: כלומר אם $N \subseteq M$ הם R -מודולים, קיים תת-מודול $N' \subseteq M$ כך ש- $N \cap N' = (0)$ ו- $M \cong N \oplus N'$.
 - ד. תנו דוגמה לחוג R ולארבעה מודולים M_1, M_2, M, M' כך שקיימות סדרות מדויקות $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$ ו- $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M' \rightarrow M_2 \rightarrow 0$, אבל M ו- M' אינם איזומורפיים.
3. יהיו p, q שני רציונליים חיוביים.

נסמן ב- $H_{p,q}$ את המרחב הליניארי ממימד 4 מעל \mathbb{Q} , עם בסיס $\{1, i, j, k\}$. נגדיר על $H_{p,q}$ כפל וחיבור כדלקמן; החיבור יהיה החיבור במרחב הליניארי, והכפל יוגדר על איברי בסיס בעזרת הנוסחאות הבאות, ויורחב לכל האיברים ע"י דיסטריבוטיביות.

$$\begin{aligned} i^2 &= -p & j^2 &= -q & k^2 &= -pq \\ ij &= k & jk &= qi & ki &= pj \\ ji &= -k & kj &= -qi & ik &= -pj \end{aligned}$$

(1 פועל כזהות).

א. הראו כי ביחס לפעולות הנ"ל, $H_{p,q}$ היא אלגברה מעל \mathbb{Q} שהיא גם חוג עם חילוק.

ב. אם $p', q' \in \mathbb{Q}$ חיוביים ו- $p' = a^2 p, q' = b^2 q$ עבור $a, b \in \mathbb{Q}$, בנו איזומורפיזם של \mathbb{Q} -אלגבראות $H_{p,q} \cong H_{p',q'}$.

ג. הראו כי לכל $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $H_{p,q}$ מכילה שדה איזומורפי לשדה $\mathbb{Q}(\sqrt{-a^2 p - b^2 q - c^2 pq})$.

ד. חשבו את $Z(H_{p,q})$.

ה. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

ו. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

ז. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

ח. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

ט. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

י. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

יא. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

יב. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

יג. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

יד. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

טו. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

טז. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

טז. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

יז. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

יח. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

יט. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

כ. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

כא. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

כב. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

כג. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

כד. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.

כה. הראו כי $H_{p,q}$ איזומורפית ל- $M_2(\mathbb{Q})$ אם ורק אם p, q הם ריבועי שלמים.